Funzioni differenziabili e convessità

Definizione *Sia f una funzione differenziabile su un intervallo I. Si dice che f è convessa se*

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)\,, \qquad \forall\ x_1, x_0 \in I\,; \tag{1}$$

f si dice strettamente convessa se in (1) vale la disuguaglianza stretta per ogni $x_1 \neq x_0$. Una funzione si dice [strettamente] concava se $-f$ è [strettamente] convessa.

Poiché, per definizione, la funzione $x \to y = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$ è la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, la relazione (1) si interpreta dicendo che il 'grafico di f è tutto al di sopra di una sua qualunque retta tangente'.

La convessità per funzioni differenziabili è caratterizzata dalla seguente

Proposizione *Sia f una funzione differenziabile su un intervallo I. Allora, f è [strettamente] convessa se e solo se f' è [strettamente] crescente su I.*

Dimostrazione Assumiamo f' crescente su I. Per $x_1 = x_0$ la (1) è sempre vera. Se $x_1 \neq x_0$, per il Teorema di Lagrange esiste ξ tra x_0 e x_1 tale che[1] $f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0)$. Quindi se $x_1 > x_0$ si ha

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0)\,, \tag{2}$$

dove, nella disuguaglianza abbiamo usato il fatto che f' è crescente e che $x_0 < \xi < x_1$. Se $x_1 < \xi < x_0$, la (2) vale ancora, ma la disuguaglianza, questa volta, vale perchè $f'(x_0) \geq f'(\xi)$ e $(x_1 - x_0) < 0$. Quindi se f' è crescente, la (1) vale per ogni $x_1 \neq x_0$.

Assumiamo ora che valga (1) e mostriamo che f' è crescente. Poiché la (1) vale per ogni $x_1 \neq x_0$ deve valere anche con x_0 e x_1 scambiati e quindi valgono simultaneamente le relazioni

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0) \tag{3}$$

$$f(x_0) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_0 - x_1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_0 - x_1) \tag{4}$$

Quindi, se $x_0 < x_1$, si ha che[2]

$$f'(x_0) \overset{(3)}{\leq} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \overset{(4)}{\leq} f'(x_1)\,.$$

Naturalmente, nel caso 'strettamente convesso' si ripete l'argomento con le disuguaglianze strette. ∎

Se f è derivabile due volte su I, allora:

$$f'' \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ è crescente} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è convessa}$$

$$f'' > 0 \quad \Longrightarrow \quad f' \text{ è strettamente crescente} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è strettamente convessa}$$

[1] Indipendentemente dall'ordine di x_1 e x_0.

[2] Si noti che la seconda disuguaglianza deriva da (4) dividendo per $(x_0 - x_1)$, che è una quantità negativa, e quindi la disuguaglianza cambia verso.